第10講　一般項を求めないで極限

10

［A］ $f(x)=\dfrac{5}{x^2+4}$ として，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=f(a_n)$$

で定義する．このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

［B］ x の関数 $f(x)$ が $0\leqq x\leqq 1$ において連続で $0<f(0)<1$，$f(1)=0$ を満たすとする．

また，$f(x)$ は $0<x<1$ において微分可能であり，この区間で $f'(x)<0$ かつ $|f'(x)|\leqq\dfrac{1}{2}$ を満たすとする．

このとき $0<a_1<1$，$a_{n+1}=f(a_n)$ を満たす数列 $\{a_n\}$ に対し，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第10講　一般項を求めないで極限

10　$a_{n+1}=\dfrac{1}{5}\left(a_n+\dfrac{4}{a_n}\right)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ および $a_1=\dfrac{4}{5}$ を満たす数列 $\{a_n\}$ において，次の問いに答えよ.

(1)　すべての自然数 n に対して $a_n \geqq \dfrac{4}{5}$ が成り立つことを示せ.

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第10講　一般項を求めないで極限

10

［A］ $f(x)=\dfrac{5}{x^2+4}$ として，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=2,\qquad a_{n+1}=f(a_n)$$

で定義する．このとき，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

［B］ x の関数 $f(x)$ が $0\leqq x\leqq 1$ において連続で $0<f(0)<1$，$f(1)=0$ を満たすとする．

また，$f(x)$ は $0<x<1$ において微分可能であり，この区間で $f'(x)<0$ かつ $|f'(x)|\leqq\dfrac{1}{2}$ を満たすとする．

このとき $0<a_1<1$，$a_{n+1}=f(a_n)$ を満たす数列 $\{a_n\}$ に対し，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

【答】 ［A］ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$

［B］ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$（ただし α は $f(\alpha)=\alpha$ かつ $0<\alpha<1$ を満たす実数）

【解説】

［A］ $f(x)=\dfrac{5}{x^2+4}>0$ であり，これと $a_1=2>0$ より帰納的に $a_n>0$ である．

次に

$$f(x)-1=\frac{5}{x^2+4}-1$$
$$=-\frac{x+1}{x^2+4}(x-1)$$

であり，$x>0$ のとき $x+1>0$ なので

$$0<\frac{x+1}{x^2+4}=\frac{1}{x-1+\dfrac{5}{x+1}}$$
$$=\frac{1}{x+1+\dfrac{5}{x+1}-2}$$
$$\leqq\frac{1}{2\sqrt{(x+1)\dfrac{5}{x+1}}-2}=\frac{1+\sqrt{5}}{8}\text{ が成り立つ．}$$

$$\therefore\quad 0<\frac{x+1}{x^2+4}<\frac{1}{2}\text{ である．}$$

よって

$$|f(x)-1|=\left|-\frac{x+1}{x^2+4}\right||x-1|$$
$$<\frac{1}{2}|x-1|$$

となる．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ここで

$$|f(a_n)-1|<\frac{1}{2}|a_n-1|$$

$$\therefore\quad |a_{n+1}-1|<\frac{1}{2}|a_n-1|$$

が成り立つので

$$|a_n-1|<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-1|$$

ここで $0<\frac{1}{2}<1$ より

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-1|\to 0\ (n\to\infty)$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-1|=0 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_n=1}$$

［B］ 条件より，$f(x)=x$ かつ $0<x<1$ を満たす実数がただ１つだけ存在する．それを α とおくと，α は $f(\alpha)=\alpha$ かつ $0<\alpha<1$ を満たす．

　また，条件より $0<x<1$ なる x に対しては $0<f(x)<1$ なので，$0<a_1<1$ より，帰納的に $0<a_n<1$ を得る．

このとき

$$a_{n+1}-\alpha=f(a_n)-f(\alpha)$$

が成り立つが，平均値の定理より

$$f(a_n)-f(\alpha)=(a_n-\alpha)f'(\theta)$$

を満たす θ が a_n と α の間に存在し，この式は $a_n=\alpha$ のときにも成立するので，

$|f'(\theta)|\leqq\frac{1}{2}$ を用いると

$$|a_{n+1}-\alpha|=|f(a_n)-f(\alpha)|=|f'(\theta)||a_n-\alpha|\leqq\frac{1}{2}|a_n-\alpha|$$

が成り立つ．

よって $|a_n-\alpha|\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-\alpha|$ となるが，

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-\alpha|=0$ より $|a_n-\alpha|\to 0\ (n\to\infty)$

よって　**$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$（ただし α は $f(\alpha)=\alpha$ かつ $0<\alpha<1$ を満たす実数）**

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第10講　一般項を求めないで極限

10　$a_{n+1}=\dfrac{1}{5}\left(a_n+\dfrac{4}{a_n}\right)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ および $a_1=\dfrac{4}{5}$ を満たす数列 $\{a_n\}$ において，次の問いに答えよ．

(1)　すべての自然数 n に対して $a_n \geqq \dfrac{4}{5}$ が成り立つことを示せ．

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

【答】 (1) 略　(2) 1

【解説】

(1)　$a_1=\dfrac{4}{5}$ より $n\geqq 1$ について $a_n \geqq \dfrac{4}{5}$ と仮定するとき

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{5}\left(a_n+\frac{4}{a_n}\right) \\ &\geqq \frac{1}{5}\cdot 2\sqrt{a_n\cdot\frac{4}{a_n}}=\frac{4}{5} \end{aligned}$$

より帰納的に $a_n \geqq \dfrac{4}{5}$ が示された．

(2)

$$\begin{aligned} a_{n+1}-1 &= \frac{1}{5}\left(a_n+\frac{4}{a_n}-5\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(1-\frac{4}{a_n}\right)(a_n-1) \end{aligned}$$

より

$$|a_{n+1}-1|=\frac{1}{5}\left|1-\frac{4}{a_n}\right||a_n-1|$$

ここで

$$a_n \geqq \frac{4}{5} \iff -4 \leqq 1-\frac{4}{a_n} < 1$$

$$\therefore\quad \frac{1}{5}\left|1-\frac{4}{a_n}\right| \leqq \frac{4}{5}$$

よって

$$|a_{n+1}-1| \leqq \frac{4}{5}|a_n-1|$$

ゆえに

$$|a_n-1| \leqq \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}|a_1-1| \to 0 \quad (n\to\infty)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n=1}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。